Sei λ max. Gewicht, o.B.d.A. $\lambda \in \Pi(M')$.

$M(\lambda) \longrightarrow M'$ ist injektiv, $M'/M(\lambda) \oplus M'' = M/M(\lambda)$

hat Std-Filt $\Rightarrow$ ebenso Summanden IV $\Rightarrow$ $M'/M(\lambda)$, M''

haben SF, $0 \longrightarrow M(\lambda) \longrightarrow M' \longrightarrow M'/M(\lambda) \longrightarrow 0$ keS

$\Rightarrow$ M' hat SF.

(B) Gleiche Induktion, $M(\lambda) \cong U(n^-)$, etc. □.

<u>Theorem 3.16</u>. M mit SF

$$\Rightarrow \quad (M : M(\lambda)) = \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(M, M(\lambda)^\vee) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

<u>Beweis</u> Ind nach Länge der SF $M = M(\lambda)$ ✓

Sonst: keS $0 \to N \to M \to M(\mu) \to 0$

$$\Rightarrow \quad (M : M(\lambda)) = \delta_{\lambda\mu} + (N : N(\lambda)).$$

eS:
$$0 \longrightarrow \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(M(\mu), M(\lambda)^\vee)}_{\delta_{\lambda\mu} \text{ Theorem 3.5}} \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(M, M(\lambda)^\vee)$$
$$\longrightarrow \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(N, M(\lambda)^\vee)}_{(N : N(\lambda)) \text{ nach IV}} \longrightarrow \underbrace{\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M(\mu), M(\lambda)^\vee)}_{= 0} \cdots$$

□.

Projektive in $\mathcal{O}$

Def 3.17 (1) $P \in \mathcal{O}$ heißt <u>projektiv</u>, falls

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P,-)$ exakt $\left(\Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists \tilde{\varphi}"'] \arrow[d, "\forall \varphi"] & \\ M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \right)$

(2) $I \in \mathcal{O}$ heißt <u>injektiv</u>, falls

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(-,I)$ exakt $\left(\Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "\exists \tilde{\varphi}"'] & N \arrow[d, "\forall \varphi"] \\ & & I \end{tikzcd} \right)$

Bem. 3.18 $\qquad M$ projektiv $\Leftrightarrow$ $M^\vee$ injektiv.

(da $(-)^\vee$ exakt & $(-)^{\vee\vee} \cong \mathrm{id}$)

Prop 3.19 (1) Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ dominant (z. B. $\lambda \in \Lambda^+ - \rho$).

Dann ist $M(\lambda)$ projektiv.

(2) Sei $P \in \mathcal{O}$ projektiv und $\dim L < \infty$. Dann ist

$P \otimes L$ projektiv.

Beweis (1) Sei $\quad M \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0 \quad$ exakt

und $\quad \varphi : M(\lambda) \longrightarrow N \quad$, oBdA $\varphi \neq 0$

Da $\operatorname{im}\varphi \in \mathcal{O}_\chi$, $\chi = \chi_\lambda$, o.B.d.A. $M, N \in \mathcal{O}_\chi$.

$\exists\, v \in M : \pi(v) = \varphi(v_\lambda)$. Dann enthält

$V := \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)v$ einen maximalen Vektor $w \in V_\mu$ mit

$\mu \in W_{[\lambda]}\cdot\lambda \overset{\text{(da } M \in \mathcal{O}_\chi \text{ / Theorem 1.22)}}{\Longrightarrow} \mu \not> \lambda$. Dann ist $w \in \mathbb{C}v$ und $\mathfrak{n}^+ v = 0$.

Folglich existiert (Prop 1.6) $\tilde{\varphi} : M(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \tilde{M}$, $\tilde{\varphi}(v_\lambda) = v$.

Es folgt $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, da v_λ zyklisch ist.

(2) Es gilt $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P \otimes L, -) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P, \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(L, -))$

und $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(L, -)$ ist exakt in $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, also auch

in $\mathcal{O}$. Die Verknüpfung exakter Funktoren ist exakt. $\square$

<u>Übung</u>. 3.20 Sei I injektiv in $\mathcal{O}$ und $\dim L < \infty$.

Zeige, dass $I \otimes L$ injektiv ist.

Lösning 3.20

– 0 01′ –

$$\cancel{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((I \otimes L)^{\vee} \otimes, M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I \otimes L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L^*, I))$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(- \otimes L^*, I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L^*, -), I)$$

$\square$

<u>Theorem 3.21</u> Die Kategorie $\mathcal{O}$ hat genug Projektive und genug Injektive. D.h.

(1) $\forall M \in \mathcal{O} \quad \exists \; \pi : P \twoheadrightarrow M$, P projektiv

(2) $\forall M \in \mathcal{O} \quad \exists \; j : M \rightarrowtail I$, I injektiv.

<u>Beweis.</u> Mit $(-)^\vee$ exakt, $(-)^{\vee\vee} \cong \mathrm{id}$ gilt $(1) \Rightarrow (2)$.

~~Sei also $M \in \mathcal{O}$~~

<u>Beh. 1.</u> $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^* \quad \exists \underset{\text{proj.}}{P}, \; \pi : P \twoheadrightarrow L(\lambda)$

Für $n \gg 0$ ist $\mu := \lambda + n\rho$ dominant $\overset{\text{Prop 3.14}}{\Longrightarrow}$ $M(\mu)$ projektiv.

Weiter $n\rho \in \Lambda_+$, also $\dim L(n\rho) < \infty$ (~~Prop.~~ Theorem 1.12)

Prop 3.19 $\Rightarrow$ $P := M(\mu) \otimes L(n\rho)$ projektiv. Das niedrigste Gewicht von $L(n\rho)$ ist $-n\rho$. Daher ist

$$(M : M(\lambda)) \overset{\text{Th. 3.14.}}{=} \dim L(n\rho)_{-n\rho} \geq 1$$
$$\lambda = \mu - n\rho$$

. Da $-n\rho$ ein minimales Gewicht ist, zeigt der Beweis von Th. 3.14 genauer, dass $\exists \; \pi : M \twoheadrightarrow M(\lambda) \Rightarrow$ Beh. 1.

<u>Beh. 2</u> $\forall M \; \exists \; P$ proj. $\pi : P \twoheadrightarrow M$

Induktion nach der Länge.

$$\begin{tikzcd} & & & P' \arrow[dl, dashed, "\pi"'] \arrow[d, "\mathrm{IV}"] & \\ 0 \arrow[r] & L(\lambda) \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Entweder π surjektiv oder $\operatorname{im} \pi \cap L(\lambda) = 0$.

Dann ist $\operatorname{im} \pi \cong N$ und $M = L(\lambda) \oplus N$. Mit Beh. 1 $\Rightarrow$ Beh. 2. $\square$.

<u>Bem. 3.22.</u> Der Modul P aus Beh. 1 hat eine SF mit Subquotienten $M(\mu+\nu)$, $\nu \in \Pi(L(n\rho))$.

<u>Def.</u> 3.23 $\pi : P$ ~~proj~~ $\twoheadrightarrow M$ heißt projektive ÜD von M, falls P proj., π surj. und 'π essentiell: $\forall N \subsetneq P$ Untermoduln: $\pi(N) \subsetneq M$.

<u>Kor. 3.24</u> Jedes $M \in \mathcal{O}$ hat eine proj. ÜD.

(bis auf Isom. eind.).

<u>Theorem 3.25.</u> Sei $P(\lambda)$ die proj. ÜD von $M(\lambda)$.

(1) Jeder unzerlegbare proj. Modul $P \in \mathcal{O}$ ist ein $P(\lambda)$.

(2) Sei $P \in \mathcal{O}$ proj. $= \bigoplus P(\lambda_i)$. Dann ist

$$\#\{i \mid P(\lambda_i) \cong P(\lambda)\} = \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P, L(\lambda)).$$

(3) $\forall M \in \mathcal{O}$ ist

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), M) = [M : L(\lambda)].$$

<u>Beweis</u>. (1) $\exists \lambda,\ \varphi :$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, dotted, shift right, "\tilde{\pi}_\lambda"'] & L(\lambda) \\ & P(\lambda) \arrow[u, "\pi_\lambda"'] \arrow[ul, dotted, shift right, "\tilde{\pi}"'] \end{tikzcd}$$

π_λ essentiell $\Rightarrow$ $\tilde{\pi}_\lambda$ surj. $\quad \tilde{\pi} \circ \tilde{\pi}_\lambda = \mathrm{id} \Rightarrow P(\lambda)$ direkter Summand von P $\underset{P\text{ unzerl.}}{\Rightarrow}$ $P \cong P(\lambda)$.

(2) $\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), L(\lambda)) = 1$

(3) Für kES: $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$

ist $[M : L(\lambda)] = [M' : L(\lambda)] + [M'' : L(\lambda)]$

und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), -)$ exakt

$\Rightarrow 0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), M') \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), M)$

$\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), M'') \to 0$

Daher sind beide Seiten wohl def. auf $K_0 = K(\mathcal{O})$ und es reicht, die Beh. für $M = L(\mu)$ zu zeigen. Aber dann ist $\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), L(\mu)) = \delta_{\lambda\mu} = [L(\mu) : L(\lambda)]$. D.

Theorem 3.26. Jedes projektive $P \in \mathcal{O}$ hat eine SF.

$(P(\lambda) : M(\mu)) \neq 0 \iff \mu \geq \lambda$

und $(P(\lambda) : M(\lambda)) = 1$.

Beweis Aus Bem. 3.22 und Prop. 3.15. $\square$

Kor. 3.27 Sind $P, P' \in \mathcal{O}$ projektiv mit $\mathrm{ch}\, P = \mathrm{ch}\, P'$, so ist $P \cong P'$

Beweis Folgt leicht mit Th. 3.25. $\square$.

Theorem 3.28 (BGG - Reziprozität)

$\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$: $$(P(\lambda) : M(\mu)] = [M(\mu) : L(\lambda)] = [M(\mu)^\vee : L(\lambda)]$$

Beweis: ~~OBdA: $W\lambda = W\mu$.~~

$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), M(\mu)^\vee) = [M(\mu)^\vee : L(\lambda)]$ nach Th. 3.25.
Weiter hat $P(\lambda)$ eine SF nach Th. 3.26. Nach Th. 3.16 gilt daher

$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P(\lambda), M(\mu)^\vee) = (P(\lambda) : M(\mu))$. $\square$.